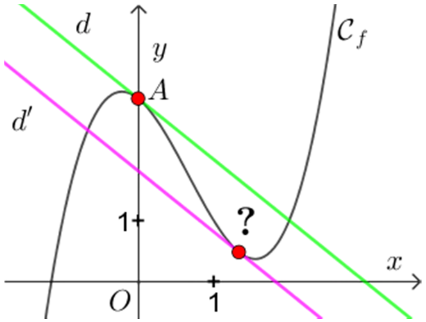
Défi Dérivation 01

Pour tout réel x on pose $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3$, on note A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse nulle et d la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A.
Déterminer les coordonnées du point de $\mathcal{C}_f$ distinct de A en lequel la tangente d' à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la tangente d.



Corrigé

Soit $a \in \mathbb{R}$.
D'une part, pour tout $h \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &f(a+h) \\ &= (a+h)^3 - 2(a+h)^2 - (a+h) + 3 \\ &= a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 2(a^2 + 2ah + h^2) - a - h - 3 \\ &= a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - 2a^2 - 4ah - 2h^2 - a - h - 3 \\ &= h^3 + h^2(3a-2) + h(3a^2 - 4a - 1) + a^3 - 2a^2 - a - 3 \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$f(a) = a^3 - 2a^2 - a + 3$$

donc :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{h^3 + h^2(3a-2) + h(3a^2 - 4a - 1)}{h} = \frac{h(h^2 + h(3a-2) + 3a^2 - 4a - 1)}{h}$$
$$h^2 + h(3a-2) + 3a^2 - 4a - 1$$

On a :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} [h^2 + h(3a-2) + 3a^2 - 4a - 1]$$
$$= 3a^2 - 4a - 1$$

On en déduit que $f'(0) = 3(0)^2 - 4(0) - 1 = -1$: la tangente d a donc pour coefficient directeur (-1).
On sait que $d' \parallel d$ et que le coefficient directeur de d est (-1).
Or, deux droites non verticales sont parallèles lorsqu'elles ont même coefficient directeur, donc le coefficient directeur de d' est aussi (-1).

Il s'agit donc de déterminer $x_B \neq 0$ $(x_A = 0)$ tel que $f'(x_B) = -1$, x_B est la solution non nulle de l'équation $f'(x) = -1$.
On a les équivalences :

$$f'(x) = -1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 1 = -1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(3x-4) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \ ou \ 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ ou \ x = \frac{4}{3}$$

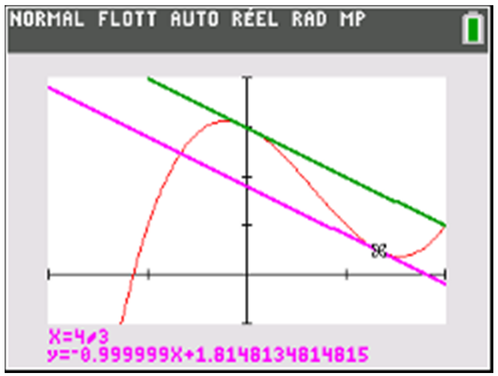
La solution non nulle de $f'(x) = -1$est $\frac{4}{3}$ donc $x_B = \frac{4}{3}$.
Or, $B \in \mathcal{C}_f$ donc $y_B = f(x_B)$, d'où :

$$y_B = f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} + 3 = \frac{13}{27}$$

Finalement :

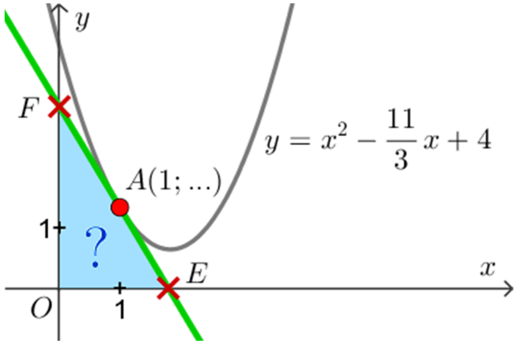
$$\boldsymbol{B\left(\frac{4}{3} ; \frac{13}{27}\right)}$$

Vérification à la calculatrice



Défi Dérivation 02

Dans un repère orthonormé du plan, d'origine O, la tangente à la parabole d'équation $y = x^2 - \frac{11}{3}x + 4$ au point A d'abscisse $x_A = 1$ coupe l'axe des abscisses en E et l'axe des ordonnées en F :



Quelle est l'aire du triangle rectangle OEF ?

Corrigé

Pour tout réel x on pose : $f(x) = x^2 - \frac{11}{3}x + 4$.

La tangente T_A à la parabole représentative de f au point A d'abscisse 1 admet pour équation : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. On a, pour tout réel h :

$$f(1+h) = (1+h)^2 - \frac{11}{3}(1+h) + 4 = 1 + 2h + h^2 - \frac{11}{3} - \frac{11}{3}h + 4$$
$$= h^2 + \left(2 - \frac{11}{3}\right)h + 5 = h^2 - \frac{5}{3}h + \frac{4}{3}$$

et :

$$f(1) = 1^2 - \frac{11}{3}(1) + 4 = 5 - \frac{11}{3} = \frac{4}{3}$$

donc, pour tout $h \neq 0$:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{h^2 - \frac{5}{3}h + \frac{4}{3} - \frac{4}{3}}{h} = \frac{h\left(h - \frac{5}{3}\right)}{h} = h - \frac{5}{3}$$

On a :

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0}\left(h - \frac{5}{3}\right) = -\frac{5}{3}$$

La tangente T_A admet donc pour équation :

$$y = -\frac{5}{3}(x-1) + \frac{4}{3}$$
$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3} + \frac{4}{3}$$
$$y = -\frac{5}{3}x + \frac{9}{3}$$
$$y = -\frac{5}{3}x + 3$$

Pour $y = 0$ on obtient :

$$0 = -\frac{5}{3}x + 3 \Leftrightarrow \frac{5}{3}x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}$$

donc : $E\left(\frac{9}{5}\,;0\right)$.

Pour $x = 0$ on obtient :

$$y = -\frac{5}{3}(0) + 3 = 3$$

donc : $F(0\,;3)$.

On a donc : $OE = \frac{9}{5}$ et $OF = 3$.

Or,

$$\mathcal{A}_{OEF} = \frac{1}{2} \times OE \times OF$$

donc :

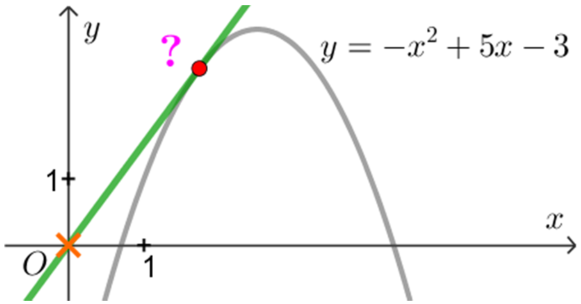
$$\mathcal{A}_{OEF} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{5} \times 3 = \frac{27}{10}$$

Conclusion

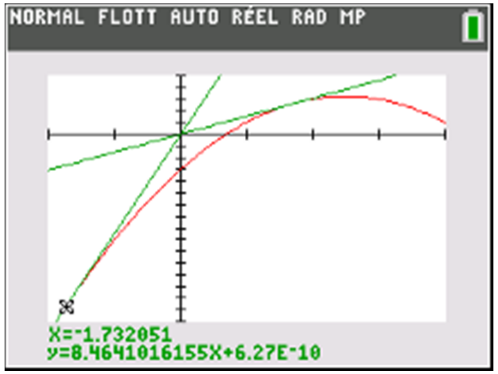
Le triangle rectangle OEF a une aire égale à $\mathbf{\frac{27}{10}}$.

Défi Dérivation 03

Dans un repère orthogonal du plan on considère la parabole d'équation $y = -x^2 + 5x - 3$; déterminer les coordonnées du ou des point(s) de cette parabole en lequel (lesquels) la tangente passe par l'origine du repère :



Vérification



Corrigé

Pour tout réel x on pose $f(x) = -x^2 + 5x - 3$.

Soit $a \in \mathbb{R}$, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a admet pour équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$
$$\Leftrightarrow y = f'(a)x - af'(a) + f(a)$$

Donc l'ordonnée à l'origine de cette tangente est : $f(a) - af'(a)$.

Or, une droite non verticale passe par l'origine du repère si et seulement si son ordonnée à l'origine est nulle.

Il s'agit donc de trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) - af'(a) = 0$ autrement dit il s'ait de résoudre l'équation $f(x) - xf'(x) = 0$ $(*)$.

Or, pour tout réel $x, f'(x) = -2x + 5$ donc l'équation $(*)$s'écrit :

$$-x^2 + 5x - 3 - x(-2x+5) = 0$$
$$\Leftrightarrow -x^2 + 5x - 3 + 2x^2 - 5x = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(x + \sqrt{3}\right)\left(x - \sqrt{3}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow x + \sqrt{3} = 0 \text{ ou } x - \sqrt{3} = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}$$

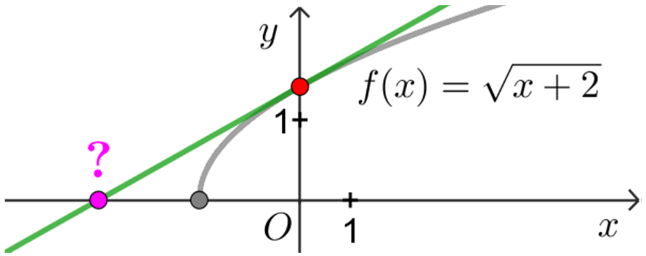
Or :

$$f\left(-\sqrt{3}\right) = -\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 5\left(-\sqrt{3}\right) - 3 = -3 - 5\sqrt{3} - 3 = -6 - 5\sqrt{3}$$
$$f\left(\sqrt{3}\right) = -\left(\sqrt{3}\right)^2 + 5\left(\sqrt{3}\right) - 3 = -3 + 5\sqrt{3} - 3 = -6 + 5\sqrt{3}$$

Deux points répondent à la question : $A\left(\sqrt{3}\,; -6 + 5\sqrt{3}\right)$ et $B\left(-\sqrt{3}\,; -6 - 5\sqrt{3}\right)$.

Défi Dérivation 04

Pour tout $x \in [-2; +\infty[$ on pose : $f(x) = \sqrt{x+2}$.
La tangente au point d'abscisse nulle de $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisse en un certain point : quelles sont les coordonnées de ce point ?



Pour tout h tel que $0 + h \in \mathcal{D}_f$, c'est-à-dire $h \in [-2; +\infty[$, on a :
$f(0+h) = f(h) = \sqrt{h+2}$
D'autre part : $f(0) = \sqrt{0+2} = \sqrt{2}$
Donc pour tout $h \in \mathcal{D}_f$ tel que $h \neq 0$ on a :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h+2}-\sqrt{2}}{h} = \frac{\left(\sqrt{h+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{h+2}+\sqrt{2}\right)}{h\left(\sqrt{h+2}+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{h+2}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}{h\left(\sqrt{h+2}+\sqrt{2}\right)} = \frac{h+2-2}{h\left(\sqrt{h+2}+\sqrt{2}\right)} = \frac{h \times 1}{h \times \left(\sqrt{h+2}+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{h+2}+\sqrt{2}}$$

Finalement :

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{h+2}+\sqrt{2}}$$

On a :

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h+2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1\times\sqrt{2}}{2\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$f'(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse nulle admet pour équation :

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

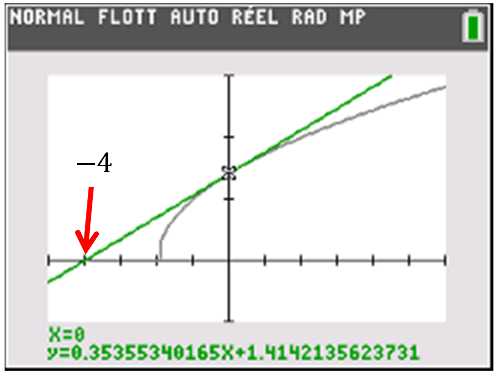
$$y = \frac{\sqrt{2}}{4}x + \sqrt{2}$$

Cette droite coupe l'axe des abscisse lorsque $y = 0$, donc il s'agit de résoudre

$$\frac{\sqrt{2}}{4}x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{4}x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}} \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \times \frac{4}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -4$$

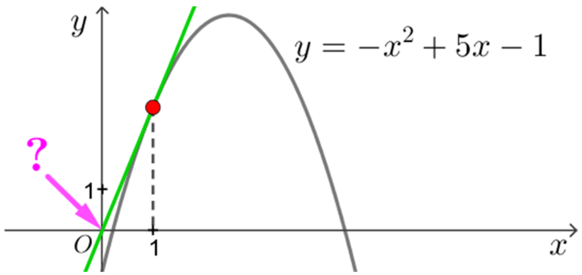
La courbe représentative de f coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(-4; 0)$.

Vérification



Défi Dérivation 05

Pour tout $x \in$ R on pose : $f(x) = -x^2 + 5x - 1$. La tangente au point d'abscisse 1 de $\mathcal{C}_f$ passe-t-elle par l'origine du repère ?



Corrigé

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 5x - 1$

Pour tout $h \in \mathbb{R}$:

$$f(1+h) = -(1+h)^2 + 5(1+h) - 1 = -(1 + 2h + h^2) + 5 + 5h - 1$$
$$= -1 - 2h - h^2 + 5 + 5h - 1 = -h^2 + 3h + 3$$
$$f(1) = -(1)^2 + 5(1) - 1 = -1 + 5 - 1 = 3$$

Pour tout $h \neq 0$:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{-h^2 + 3h + 3 - 3}{h} = \frac{-h^2 + 3h}{h} = \frac{h(-h+3)}{h} = -h + 3$$

On a :

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} (-h + 3) = 3$$

La tangente d au point d'abscisse 1 admet pour équation :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$
$$y = 3(x - 1) + 3$$
$$y = 3x - 3 + 3$$
$$y = 3x$$

La tangente d admet pour équation réduite $y = 3x$, son coefficient directeur est nul donc elle passe par l'origine du repère.

Conclusion

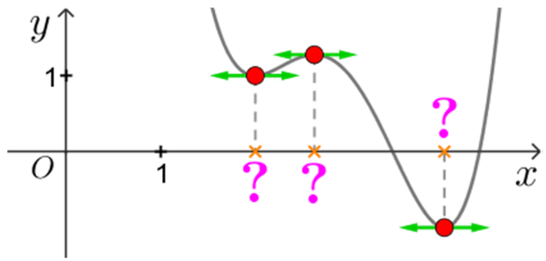
La tangente au point d'abscisse 1 de $\mathcal{C}_f$ passe par l'origine du repère.

Défi Dérivation 06 (utilise $f'(x)$)

Pour tout réel x on pose :

$$f(x) = (x-2)^2(x-3)\left(x-\frac{9}{2}\right)+1$$

On munit le plan d'un repère orthogonal ; déterminer les abscisses des points en lesquels $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale :



Corrigé

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x-2)^2(x-3)\left(x-\frac{9}{2}\right)+1$$

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = (x-2)^2 \times \left(x^2 - \frac{9}{2}x - 3x + \frac{27}{2}\right) + 1$$

$$f(x) = (x-2)^2 \times \left(x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{27}{2}\right)$$

Rappel

$$(u^2)' = 2u \times u' \ et \ (u \times v)' = u' \times v + v' \times u$$

Donc :

$$f'(x) = 2(x-2)(1) \times \left(x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{27}{2}\right) + \left(2x - \frac{15}{2}\right)(x-2)^2 + 0$$

$$f'(x) = (x-2)\left(2\left(x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{27}{2}\right) + \left(2x - \frac{15}{2}\right)(x-2)\right)$$

$$f'(x) = (x-2)\left(2x^2 - 15x + 27 + 2x^2 - 4x - \frac{15}{2}x + 15\right)$$

$$f'(x) = (x-2)\left(4x^2 - \frac{53}{2}x + 42\right)$$

Il y a une tangente horizontale pour $\mathcal{C}_f$ lorsque $f'(x) = 0$

C'est-à-dire lorsque :

$$x - 2 = 0 \ ou \ 4x^2 - \frac{53}{2}x + 42 = 0$$

- $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $4x^2 - \frac{53}{2}x + 42$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 4$, $b = -\frac{53}{2}$ et $c = 42$,

de discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{53}{2}\right)^2 - 4(4)(42) = \frac{121}{4} = \left(\frac{11}{2}\right)^2$$

$\Delta > 0$ donc il y a deux racines réelles distinctes :

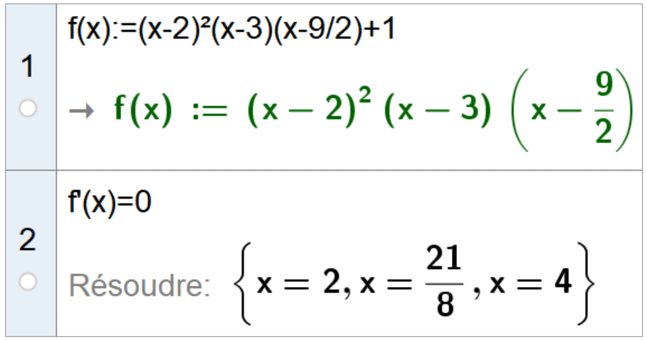
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+\frac{53}{2} - \frac{11}{2}}{2(4)} = \frac{21}{8}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+\frac{53}{2} + \frac{11}{2}}{2(4)} = \frac{32}{8} = 4$$

Conclusion

Il y a trois points exactement en lesquels la tangente est horizontale et ils ont respectivement pour abscisse : 2, $\frac{21}{8}$ et 4.

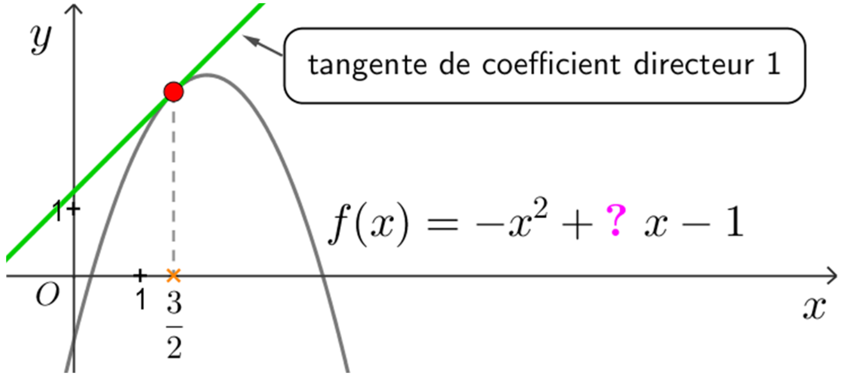
Vérification



Défi Dérivation 07

Pour tout réel x on pose : $f(x) = -x^2 + bx - 1$.

Déterminer la constante b sachant qu'au point d'abscisse $\frac{3}{2}$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ dans un repère donné du plan a pour coefficient directeur le nombre 1 :



Corrigé

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + bx - 1$ donc : $f'(x) = -2x + b$.

Au point d'abscisse $\frac{3}{2}$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ admet pour coefficient directeur 1 donc

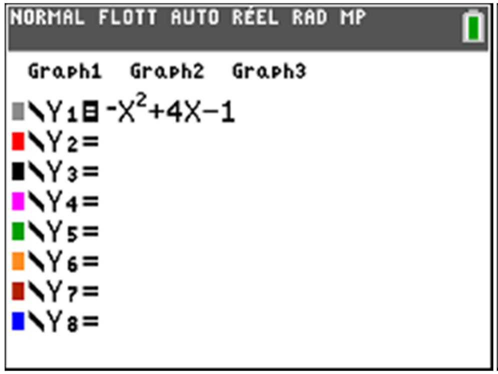
$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 1$$

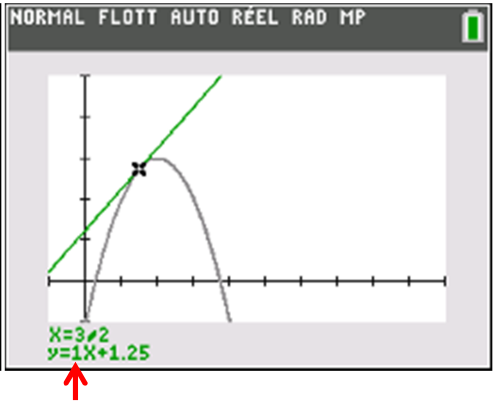
On obtient donc :

$$-2\left(\frac{3}{2}\right) + b = 1 \Leftrightarrow -3 + b = 1 \Leftrightarrow b = 1 + 3 \Leftrightarrow b = 4$$

Conclusion : $b = 4$.

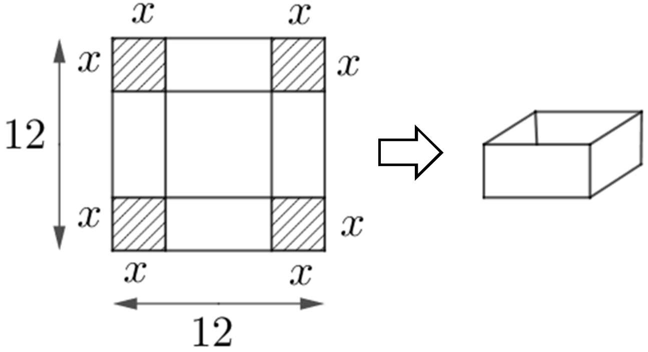
Vérification





Défi Dérivation 08

On découpe dans une feuille de carton carrée de 12 cm de côté un patron à partir duquel, par pliage, découpage et en utilisant un peu de ruban adhésif, on construit une boite sans couvercle ayant la forme d'un pavé droit.
Quel est le volume maximal de la boite ainsi obtenue et pour quelle(s) valeur(s) de x ce volume maximal est-il atteint ?



Corrigé

Remarquons que x doit pouvoir être retiré deux fois à 12, donc $2x \leqslant 12$, soit $x \leqslant 6$, et comme $x \geqslant 0$ on obtient finalement $x \in [0;6]$.
Pour$x \in [0;6]$, la boite a :

- pour base un carré de côté $12-2x$, donc d'aire $(12-2x)^2$,
- une hauteur x.

En notant $f(x)$ le volume de cette boite on a donc :

$$f(x) = (12-2x)^2 \times x$$

Puis en développant :

$$f(x) = x(144 - 48x + 4x^2) = 144x - 48x^2 + 4x^3$$

Pour tout $x \in [0;6]$, $f(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$.
D'où :

$$f'(x) = 4 \times 3x^2 - 48 \times 2x + 144$$
$$f'(x) = 12x^2 - 96x + 144$$

$12x^2 - 96x + 144$ est de la forme ax^2+bx+c avec $a=12$, $b=-96$ et $c=144$, de discriminant : $\Delta = (-96)^2 - 4(12)(144) = 2\,304 = 48^2$
$\Delta > 0$ donc $12x^2 - 96x + 144$ admet deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+96-48}{2(12)} = \frac{48}{24} = 2$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+96+48}{2(12)} = \frac{144}{2\times 12} = \frac{12^2}{2\times 12} = \frac{12}{2} = 6$$

Règle : « ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines ».

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		2		6		$+\infty$
$12x^2-96x+144$		+	0	−	0	+	

On a :

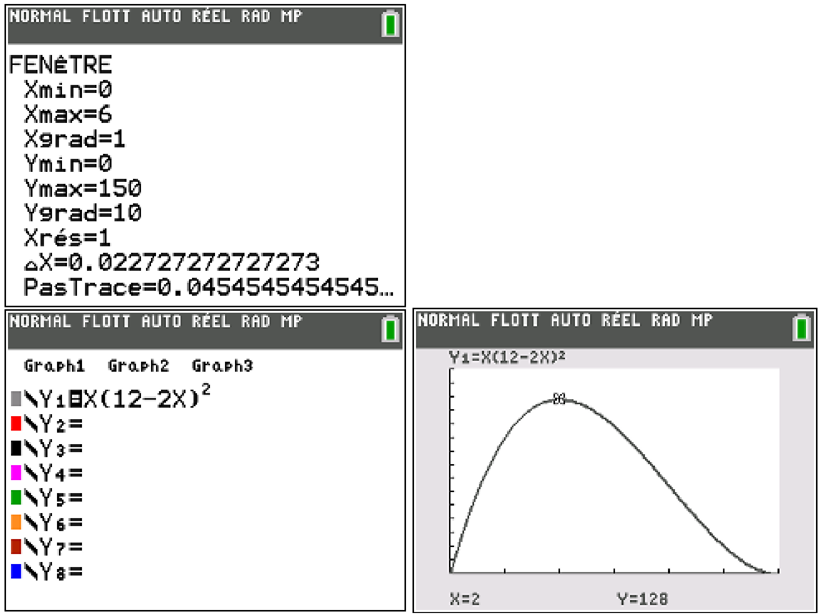
$$f(0) = 4(0)^3 - 48(0)^2 + 144(0) = 0$$
$$f(6) = (12-2(0))^2 \times 0 = 12^2 \times 0 = 0$$
$$f(2) = (12-2(2))^2 \times 2 = (12-4)^2 \times 2 = 8^2 \times 2 = 64 \times 2 = 128$$

On obtient finalement le tableau de variation :

x	0		2		6
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Sens de variation de f	0	↗	128	↘	0

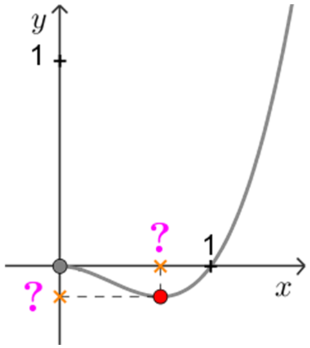
On déduit de ce tableau de variation que :
le volume maximal de la boite est $128\ cm^3$, atteint pour $x=2$ (seulement).

<u>Remarque</u> La base la boite de volume maximal est un carré de 8 cm de côté et elle a une hauteur de 2 cm.



Défi Dérivation 09

Pour tout $x \geqslant 0$, on pose : $f(x) = x^3 - x^2$.
Quelle est la valeur minimale de $f(x)$ sur $[0; +\infty[$ et pour quelle valeur de x est-elle atteinte ?



Corrigé

$\forall x \in [0; +\infty[, f(x) = x^3 - x^2$.
f est dérivable sur son ensemble de définition et pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$
$$f'(x) = x(3x - 2)$$
$$3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à l'extérieur des racines ».

$$f(0) = 0^3 - 0^2 = 0$$
$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3} - 1\right) = \frac{2^2}{3^2}\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{3}\right) = \frac{4}{9}\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{27}$$

On obtient finalement le tableau de variation :

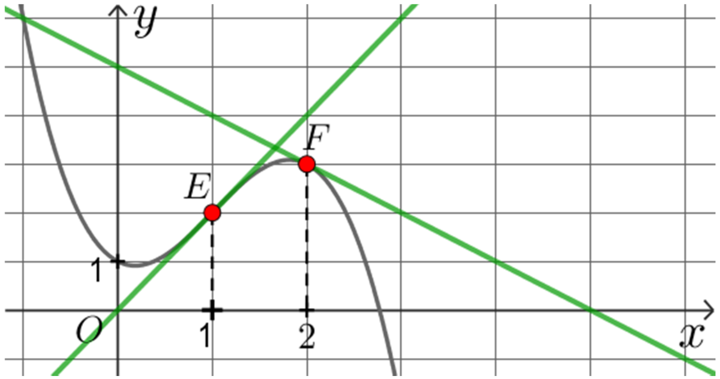
x	0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
x	0	$+$		$+$	
$3x-2$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
Sens de variation de f	0	$\searrow$	$-\frac{4}{27}$	$\nearrow$	

Le tableau de variation montre que la valeur minimale de $f(x)$ sur $[0; +\infty[$ est $-\frac{4}{27}$, atteinte pour $x = \frac{2}{3}$.

On peut aussi étudier le signe de $3x^2 - 2x$, c'est-à-dire de $f'(x)$, en tant qu'expression du second degré en rappelant la règle des signes valable pour une telle expression.

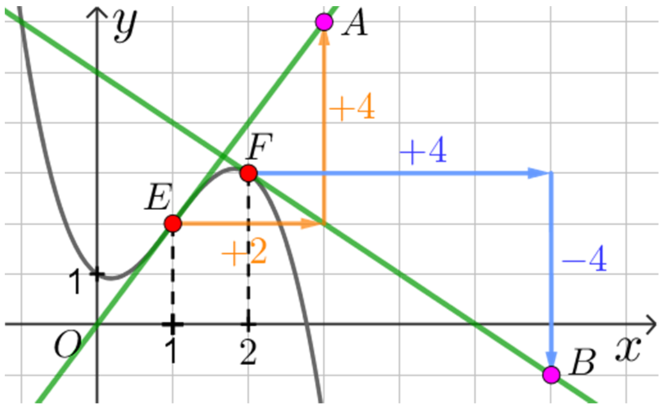
Défi Dérivation 10

Pour tout réel x on pose $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 1$, E et F sont les points de $\mathcal{C}_f$ d'abscisses respectives 1 et 2 : par lecture graphique déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en E et de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en F puis vérifier à l'aide de $f'(x)$ et de la formule de la tangente.



Corrigé

• par lecture graphique



$A(3;6)$ appartient à la tangente T_E à $\mathcal{C}_f$ en E, ona :

$$f'(1) = coeff\ directeur\ de\ la\ tangente\ en\ E$$
$$= \frac{y_A - y_E}{x_A - x_E} = \frac{6-2}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

autre rédaction

$$f'(1) = coeff\ directeur\ de\ la\ tangente\ en\ E$$
$$= \frac{variation\ des\ ordonnées}{variation\ des\ abscisses} = \frac{+4}{+2} = 2$$

D'autre part, cette tangente passe par l'origine du repère donc son ordonnée à l'origine est nulle.
L'équation réduite de T_E est donc : $y = 2x$.

$B(6;-1)$ appartient à la tangente T_F à $\mathcal{C}_f$ en F, ona :

$$f'(2) = coeff\ directeur\ de\ la\ tangente\ en\ F$$
$$= \frac{y_B - y_F}{x_B - x_F} = \frac{-1-3}{6-2} = \frac{-4}{4} = -1$$

autre rédaction

$$f'(2) = coeff\ directeur\ de\ la\ tangente\ en\ F$$
$$= \frac{variation\ des\ ordonnées}{variation\ des\ abscisses} = \frac{-4}{+4} = -1$$

La tangente T_F admet pour équation :

$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$
$$y = -1(x-2) + 3$$
$$y = -x + 2 + 3$$
$$y = -x + 5$$

La tangente admet pour équation réduite : $y = -x + 5$.
(on peut aussi remarquer que T_F coupe l'axe des ordonnées à la valeur 5 donc l'ordonnée à l'origine de T_F est 5, d'où d'équation réduite $y = -x + 5$).

• en utilisant $f'(x)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x + 1$
donc :

$$f'(x) = -3x^2 + 3 \times 2x - 1$$
$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 1$$

d'où : $f'(1) = -3(1)^2 + 6(1) - 1 = -3 + 6 - 1 = 2$
et $f(2) = -3(2)^2 + 6(2) - 1 = -3 \times 4 + 12 - 1 = -1$.
Les équation réduites de T_E et T_F s'obtiennent ensuite comme précédemment.

Défi Dérivation 11

On pose, pour tout réel x :

$$f(x) = (x^2 - 7x + 10)^2 + 1$$

Calculer $f'(x)$, en étudier le signe puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 7x + 10)^2 + 1$

rappel : $(u^2)' = 2u \times u'$

Posons : $u(x) = x^2 - 7x + 10$

On a : $u'(x) = 2x - 7$

Donc :

$$f'(x) = 2(x^2 - 7x + 10)(2x - 7) + 0$$
$$f'(x) = 2(x^2 - 7x + 10)(2x - 7)$$
$$f'(x) = (x^2 - 7x + 10)(4x - 14)$$

• étude de : $x^2 - 7x + 10$

$x^2 - 7x + 10$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1, b = -7, c = 10$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4(1)(10) = 49 - 40 = 9$.

$\Delta > 0$ donc $x^2 - 7x + 10$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 - \sqrt{9}}{2(1)} = \frac{7 - 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+7 + \sqrt{9}}{2(1)} = \frac{7 + 3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Règle : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines ».

• étude de : $4x - 14$

$$4x - 14 = 0 \Leftrightarrow 4x = 14 \Leftrightarrow x = \frac{14}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7}{2}$$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine ».

• tableau de variation de f

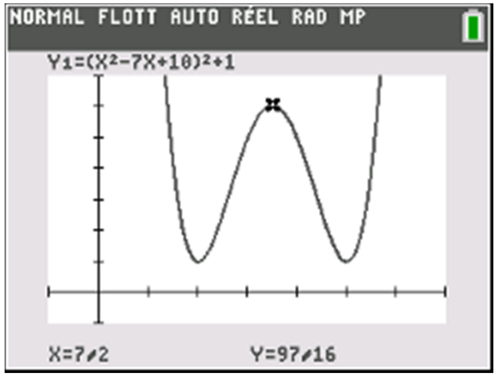
$$f(2) = ((2)^2 - 7(2) + 10)^2 + 1 = (4 - 14 + 10)^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1$$
$$f\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{7}{2}\right) + 10\right)^2 + 1 = \frac{97}{16}$$
$$f(5) = ((5)^2 - 7(5) + 10)^2 + 1 = (25 - 35 + 10)^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1$$

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f.

On obtient finalement le tableau de variation :

x	$-\infty$		2		$\frac{7}{2}$		5		$+\infty$
$4x - 14$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 7x + 10$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Sens de variation de f		$\searrow$	1	$\nearrow$	$\frac{97}{16}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

Vérification



Défi Dérivation 12

On pose, pour tout réel x :

$$f(x) = (x^2 - 4x + 3)^3$$

- Calculer $f'(x)$, en étudier le signe puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
- En déduire la valeur minimale de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et la(les) valeur(s) de x permettant de l'atteindre.

Corrigé

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 4x + 3)^3$

rappel : $(u^3)' = 3u^2 \times u'$

Posons : $u(x) = x^2 - 4x + 3$

On a : $u'(x) = 2x - 4$

Donc :

$$f'(x) = 3(x^2 - 4x + 3)^2(2x - 4)$$
$$f'(x) = (x^2 - 4x + 3)^2(6x - 12)$$

- **étude de :** $\left(\boldsymbol{x^2 - 4x + 3}\right)^{\boldsymbol{2}}$

$x^2 - 4x + 3$ est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$, $b = -4$, $c = 3$,
de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(3) = 16 - 12 = 4$.
$\Delta > 0$ donc $x^2 - 4x + 3$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+4 - \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{4 - 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+4 + \sqrt{4}}{2(1)} = \frac{4 + 2}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Un carré est toujours positifs ou nul.
$(x^2 - 4x + 3)^2$ est toujours positif ou nul et s'annule pour $x = 1$ et pour $x = 3$.

- **étude de :** $\boldsymbol{6x - 12}$

$$6x - 12 = 0 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = \frac{12}{6} \Leftrightarrow x = 2$$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine ».

- **tableau de variation de** $\boldsymbol{f}$

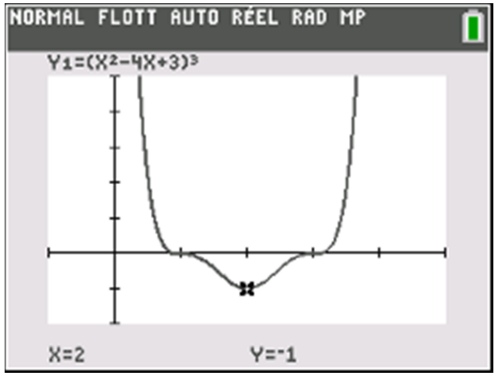
$$f(1) = ((1)^2 - 4(1) + 3)^3 = (1 - 4 + 3)^3 = 0^3 = 0$$
$$f(2) = ((2)^2 - 4(2) + 3)^3 = (4 - 8 + 3)^3 = (-1)^3 = -1$$
$$f(3) = ((3)^2 - 4(3) + 3)^3 = (9 - 12 + 3)^3 = 0^3 = 0$$

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f.

On obtient finalement le tableau de variation :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$6x - 12$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x^2 - 4x + 3)^2$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
Sens de variation de f		$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Vérification



Défi Dérivation 13

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 + ax - 7$, a constante.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère donné du plan.
Déterminer a sachant que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse (-1) est parallèle à la droite d'équation $y = 7x$.

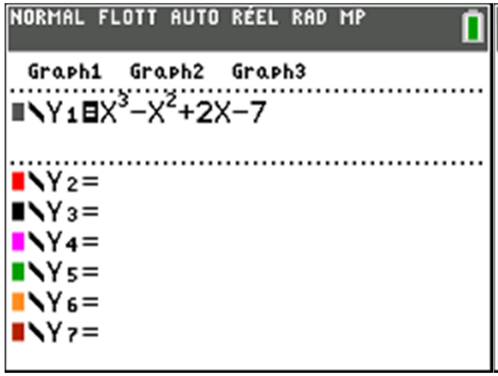
<u>Corrigé</u>

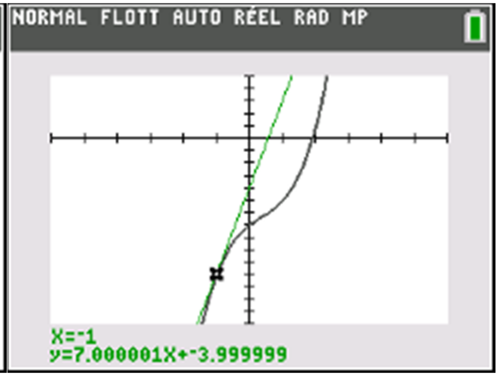
La tangente au point d'abscisse (-1) est parallèle à la droite d'équation $y = 7x$.
Or, le coefficient directeur de la tangente au points d'abscisse (-1) est $f'(-1)$ et deux droites (non verticales) sont parallèles lorsqu'elles ont le même coefficient directeur,
donc : $f'(1) = 7$.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x^2 + ax - 7$.
Donc : $f'(x) = 3x^2 - 2x + a$.
On a donc :

$$\begin{aligned} & 3(-1)^2 - 2(-1) + a = 7 \\ \Leftrightarrow\ & 3 + 2 + a = 7 \\ \Leftrightarrow\ & a = 7 - 3 - 2 \\ \Leftrightarrow\ & a = 2 \end{aligned}$$

Conclusion : $a = 2$.

<u>Vérification</u>





Défi Dérivation 14

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + x^2 + ax + b$, a et b sont des constantes.
On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère donné du plan.
Déterminer a et b sachant que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2 admet pour équation réduite $y = -7x + 16$.

<u>Corrigé</u>

La tangente au point d'abscisse 2 admet pour équation réduite $y = -7x + 16$.
Donc : $f(2) = -7(2) + 16 = -14 + 16 = 2$ et $f'(2) = -7$.
Pour tout réel x, $f(x) = -x^3 + x^2 + ax + b$.
Donc, on a d'une part :

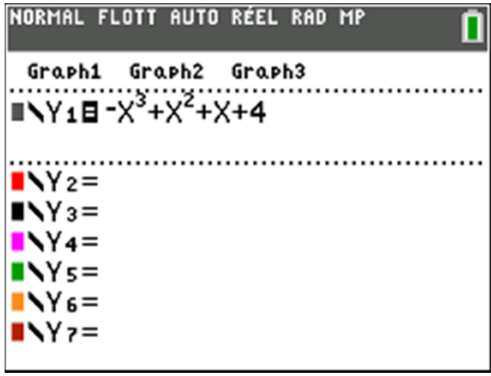
$$f(2) = -(2)^3 + (2)^2 + a(2) + b = -8 + 4 + 2a + b = 2a + b - 4$$

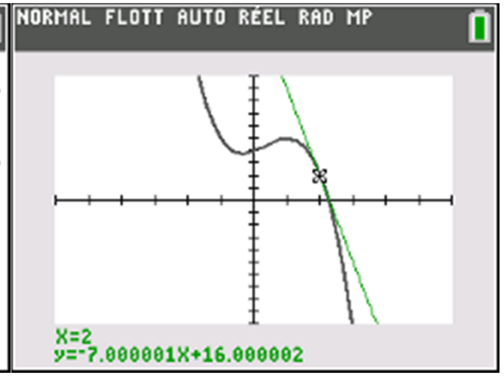
et d'autre part on a :
$f'(x) = -3x^2 + 2x + a$
donc $f'(2) = -3(2)^2 + 2(2) + a = -12 + 4 + a = -8 + a$.
Il s'agit donc de résoudre le système d'équations : $\begin{cases} -8 + a = -7 \\ 2a + b - 4 = 2 \end{cases}$.
La première équation donne : $a = -7 + 8 = 1$, puis en remplaçant dans la deuxième équation :

$$2(1) + b - 4 = 2 \Leftrightarrow 2 + b - 4 = 2 \Leftrightarrow b = 2 - 2 + 4 \Leftrightarrow b = 4$$

Conclusion : $a = 1$ et $b = 4$.

<u>Vérification</u>





Défi Dérivation 15

Pour tout réel x, on pose :

$$f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x^2-6x+10}$$

• déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3
• étudier l'existence d'un minimum et d'un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Corrigé

• tangente au point d'abscisse 3

On montrerait sans difficulté [non rédigé] que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{-2x^2+12x-16}{(x^2-6x+10)^2}$$

Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3 s'écrit :

$$y=f'(3)(x-3)+f(3)$$

Or,

$$f(3)=\frac{(3)^2-4(3)+4}{(3)^2-6(3)+10}=\frac{9-12+4}{9-18+10}=\frac{1}{1}=1$$

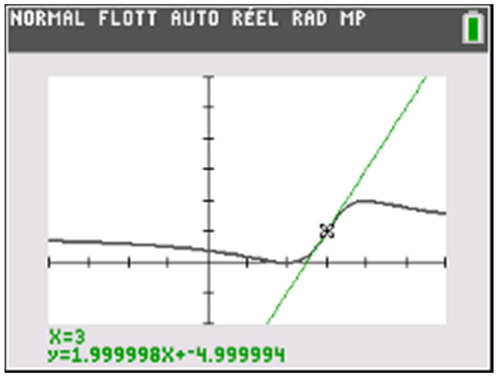
$$f'(3)=\frac{-2(3)^2+12(3)-16}{((3)^2-6(3)+10)^2}=\frac{-2\times 9+36-16}{1^2}=\frac{2}{1}=2$$

On obtient :

$$y=2(x-3)+1$$
$$y=2x-6+1$$
$$y=2x-5$$

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 3 admet pour équation réduite : $y=2x-5$.

Vérification



• minimum et maximum de f sur $\mathbb{R}$

Le tableau de variation que l'on obtient en première, sans les limites de $f(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$qui seront vues l'année prochaine, n'est d'aucune utilité…

En visualisant $\mathcal{C}_f$ sur l'écran de la calculatrice on peut conjecturer que le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est zéro, atteint en 2 ($x=2$) uniquement et que le maximum de f sur $\mathbb{R}$ est 2, atteint en 4 ($x=4$) uniquement.

On a d'une part, pour tout réel x :

$$f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x^2-6x+10}=\frac{(x-2)^2}{(x-3)^2+1}$$

qui montre que $f(x)$ est toujours positif ou nul et s'annule lorsque son numérateur s'annule, c'est-à-dire lorsque $x=2$ uniquement donc :
zéro est le minimum de f sur $\mathbb{R}$ et il est atteint en 2 uniquement.

D'autre part, on a pour tout réel x :

$$2-f(x)=2-\frac{x^2-4x+4}{x^2-6x+10}=\frac{2(x^2-6x+10)}{x^2-6x+10}-\frac{x^2-4x+4}{x^2-6x+10}$$
$$=\frac{2(x^2-6x+10)-(x^2-4x+4)}{x^2-6x+10}=\frac{2x^2-12x+20-x^2+4x-4}{x^2-6x+10}$$
$$=\frac{x^2-8x+16}{x^2-6x+10}=\frac{(x-4)^2}{(x-3)^2+1}$$

qui montre que $2-f(x)$ est toujours positifs ou nul, et que $2-f(x)=0$ lorsque $(x-4)^2=0$ autrement dit lorsque $x=4$.
On a donc : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\leqslant 2$ et on a : $f(x)=2\Leftrightarrow x=4$ autrement dit :
2 est le maximum de f sur $\mathbb{R}$ et il atteint en 4 uniquement.

Défi Dérivation 16

Pour tout réel x positif ou nul, on pose :

$$f(x) = ax - 1 + \frac{16}{x+1}$$

Déterminer a sachant qu'au point d'abscisse 3 la tangente à $\mathcal{C}_f$ admet pour coefficient directeur 1.

Corrigé

$f(x) = ax - 1 + \frac{16}{x+1}$

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$

$u(x) = 16$ $\quad u'(x) = 0$

$v(x) = x + 1$ $\quad v'(x) = 1$

$f'(x) = a + \frac{0(x+1) - 1(16)}{(x+1)^2}$

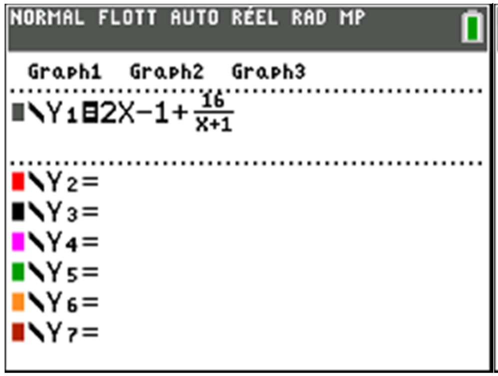
$f'(x) = a - \frac{16}{(x+1)^2}$ $\quad (*)$

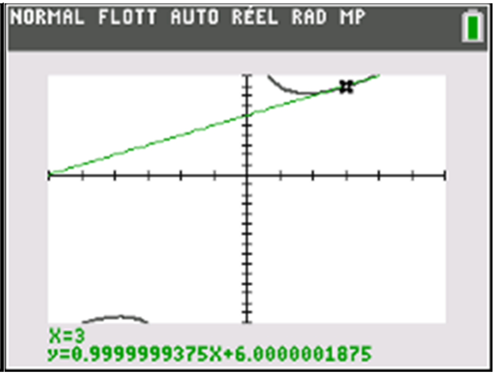
On sait qu'au point d'abscisse 3 la tangente à $\mathcal{C}_f$ admet pour coefficient directeur 1, et que le coefficient directeur est égal au nombre dérivé, donc : $f'(3) = 1$. En utilisant $(*)$ on obtient :

$$a - \frac{16}{(3+1)^2} = 1 \Leftrightarrow a - \frac{16}{16} = 1 \Leftrightarrow a = 2$$

On a donc : $a = 2$.

Vérification



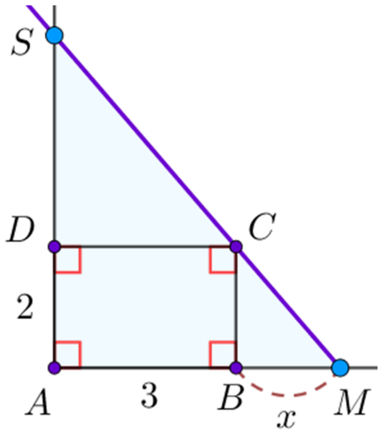


Défi Dérivation 17

Une unité de distance est choisie.

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 3$ et $AD = 2$, M un point variable de (AB) n'appartenant pas à lademi-droite $[BA)$. La demi-droite $[MC)$ coupe $[AD)$ en S.

On pose $BM = x$ et on note $f(x)$ l'aire du triangle AMS.



1. Montrer que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{x}$$

2. Calculer $f'(x)$, en étudier le signe, dresser le tableau de variation de f. En déduire l'aire minimale du triangle AMS et la valeur de x permettant de l'atteindre : que dire alors de la position relative des points A, B et M ?

Corrigé

1. Notons α la mesure commune en degré des angles $\widehat{AMS}$ et $\widehat{BMC}$.

Dans le triangle AMS rectangle en A on a :

$$\tan \widehat{AMS} = \frac{AS}{AM} = \frac{AS}{3+x}$$

autrement dit :

$$\tan \alpha = \frac{AS}{x+3} \quad (*)$$

Dans le triangle BMC rectangle en B on a :

$$\tan \widehat{BMC} = \frac{BC}{BM} = \frac{2}{x}$$

autrement dit :

$$\tan \alpha = \frac{2}{x} \quad (**)$$

Il résulte de $(*)$ et $(**)$ que :

$$\frac{AS}{x+3} = \frac{2}{x}$$

autrement dit :

$$AS = \frac{2}{x}(x+3)$$

Autre méthode : on peut obtenir AS en montrant que $(BC) /\!/ (AS)$ puis en appliquant le théorème de Thalès.

Le triangle AMS est rectangle en A donc :

$$\mathcal{A}_{AMS} = \frac{AM \times AS}{2}$$

donc :

$$\mathcal{A}_{AMS} = \frac{(3+x) \times \frac{2}{x}(x+3)}{2} = (x+3) \times \frac{2}{x} \times (x+3) \times \frac{1}{2} = \frac{2(x+3)^2}{2x}$$

$$= \frac{(x+3)^2}{x}$$

On a donc bien, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{x}$$

2. Remarquons que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) = \frac{(x+3)^2}{x} = \frac{x^2+6x+9}{x}$$

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$u(x) = x^2 + 6x + 9 \qquad u'(x) = 2x + 6$

$v(x) = x \qquad v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{(2x+6)(x) - (1)(x^2+6x+9)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2+6x-x^2-6x-9}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-9}{x^2}$$

Un carré est toujours positif ou nul doc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur : $x^2 - 9$.

$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \sqrt{9}\ ou\ x = -\sqrt{9} \Leftrightarrow x = 3\ ou\ x = -3$

Autre méthode

$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x - 3^2 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow x + 3 = 0\ ou\ x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3\ ou\ x = 3$

Rappel : « $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur de ses racines »

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
x^2-9		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f.

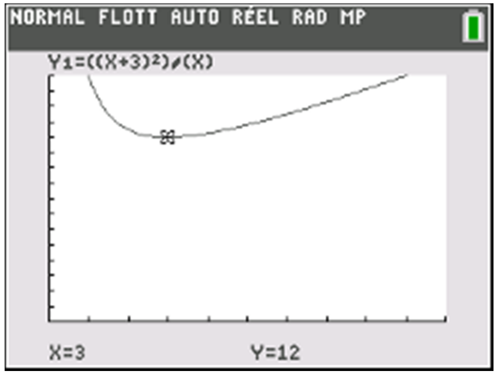
On en déduit le tableau de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$:

x	0		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Sens de variation de f	‖	$\searrow$	12	$\nearrow$	

$$f(3)=\frac{(3+3)^2}{3}=\frac{6^2}{3}=\frac{36}{3}=12$$

Le tableau de variation précédent montre que la valeur minimale de $f(x)$ est 12, atteinte pour $x=3$ (uniquement) par conséquent l'aire minimale du triangle AMS est 12, atteinte pour $x=3$ (uniquement) c'est-à-dire lorsque B est le milieu de $[AM]$.

Vérification

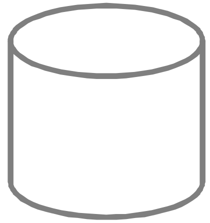


Défi Dérivation 18 Un grand classique

Une unité de distance est choisie.

Une boite de conserve de forme cylindrique doit avoir un volume donné.

Démontrer que la quantité de métal nécessaire à sa fabrication est minimale lorsque sa hauteur est égale à son diamètre.



Corrigé

Notons V le volume donné, x le rayon de l'un des disques de base du cylindre et $h(x)$ sa hauteur.

Pour un cylindre de rayon R et de hauteur h on a : $\mathcal{V}_{cylindre}=\pi R^2\times h$,

donc : $V=\pi x^2\times h(x)$, d'où :

$$h(x)=\frac{V}{\pi x^2}$$

Le patron habituel d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est constitué de deux disque de rayon R et d'un rectangle de côtés $2\pi R$ et h.

On en déduit que la quantité de métal nécessaire à la fabrication de la boite de conserve est :

$$f(x)=\pi x^2\times 2+2\pi x\times h(x)=2\pi x^2+2\pi x\times\frac{V}{\pi x^2}=2\pi x^2+\frac{2V}{x}$$

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$

$u(x)=2V$ $\qquad u'(x)=0$

$v(x)=x$ $\qquad v'(x)=1$

$$f'(x)=2\pi\times 2x+\frac{0(x)-1(2V)}{x^2}$$

$$f'(x)=4\pi x-\frac{2V}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{4\pi x\times x^2}{x^2}-\frac{2V}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{4\pi x^3-2V}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{2(2\pi x^3-V)}{x^2}$$

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur $2(2\pi x^3-V)$,de plus comme $2>0$, on en déduit que $f'(x)$ est du signe de $g(x)=2\pi x^3-V$.

Rappelons que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on note $\sqrt[3]{a}$ le nombre réel dont le cube est égal à a autrement dit : $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$.

Pour tout $x > 0$, on a :

$$g(x) = 2\pi x^3 - V = 2\pi\left(x^3 - \frac{V}{2\pi}\right) = 2\pi\left(x^3 - \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^3\right) = 2\pi(x^3 - \alpha^3)$$

en posant : $\alpha = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Or, pour tous réels a et b :

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

donc : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

Par conséquent, pour tout $x > 0$: $g(x) = 2\pi(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)$.

Or, $x > 0$ et $\alpha > 0$ donc $\alpha x > 0$ puis $x^2 + \alpha x + \alpha^2 > 0$.

Comme $2\pi > 0$ et $x^2 + \alpha x + \alpha^2 > 0$ on en déduit que $g(x)$ est du signe de $(x - \alpha)$.

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine ».

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f, donc le signe de $g(x)$ donne le sens de variation de f.

On a donc le tableau de variation :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Sens de variation de f		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

On en déduit que $f(x)$ est minimale pour $x = \alpha$: la quantité de métal nécessaire à la construction de la boite de conserve est minimale pour $x = \alpha$.

On a alors :

• d'une part : rayon de la boite de conserve $= \alpha$, donc : diamètre $= 2\alpha$

• d'autre part :

$$h(\alpha) = \frac{V}{\pi\alpha^2} = \frac{V \times \alpha}{\pi \times \alpha^3} = \frac{V \times \alpha}{\pi \times \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^3} = \frac{V \times \alpha}{\pi \times \frac{V}{2\pi}} = \frac{V \times \alpha}{\frac{V \times \pi}{2\pi}} = \frac{V \times \alpha}{\frac{V}{2}}$$

$$= V \times \alpha \times \frac{2}{V} = 2\alpha$$

On a : diamètre $= 2\alpha$ et hauteur $= 2\alpha$ par conséquent diamètre $=$ hauteur.

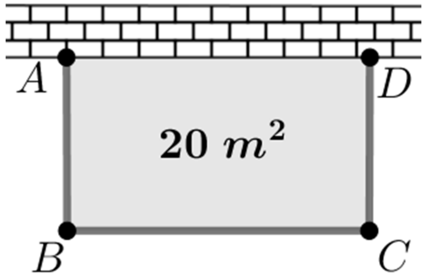
<u>Conclusion</u>

La quantité de métal nécessaire à la fabrication de la boite cylindrique est minimale lorsque **sa hauteur est égale à son diamètre**.

Défi Dérivation 19 Un grand classique

Une unité de distance est choisie.

On veut construire, le long d'un mur, un potager d'aire 20 m^2 de forme rectangulaire puis le clôturer sur ses trois côtés restés libres :



Déterminer les dimensions exactes de ce potager pour que la longueur de clôture nécessaire soit minimale.

<u>Corrigé</u>

Posons $x = AB$ et $y = BC$.

On a : $x \times y =$ aire du rectangle $ABCD = 20$, donc : $y = \frac{20}{x}$.

La longueur de la clôture est :

$$AB + BC + CD = x + \frac{20}{x} + x = 2x + \frac{20}{x}$$

Pour tout $x > 0$, on pose :

$$f(x) = 2x + \frac{20}{x} = \frac{2x^2}{x} + \frac{20}{x} = \frac{2x^2 + 20}{x}$$

• **calcul de $f'(x)$**

Rappel : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$u(x) = 2x^2 + 20$ $\qquad$ $u'(x) = 4x$

$v(x) = x$ $\qquad$ $v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{4x(x) - 1(2x^2 + 20)}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 2x^2 - 20}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 20}{x^2}$$

Un carré est toujours positif ou nul donc le signe de $f'(x)$ est celui de son numérateur : $2x^2 - 20$.

Or, pour tout réel x :

$$2x^2 - 20 = 2(x^2 - 10) = 2\left(x^2 - \left(\sqrt{10}\right)^2\right) = 2\left(x + \sqrt{10}\right)\left(x - \sqrt{10}\right)$$

Règle : « $ax + b$ est du signe de a à droite de sa racine ».

x	$-\infty$		$-\sqrt{10}$		$\sqrt{10}$		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$	
$x + \sqrt{10}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - \sqrt{10}$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+3)(2x-6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le signe de $f'(x)$ donne le sens de variation de f.

• tableau de variation

x	0		$\sqrt{10}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
sens de variation de f	$\Vert$	$\searrow$	$4\sqrt{10}$	$\nearrow$	

$$f\left(\sqrt{10}\right) = \frac{2\left(\sqrt{10}\right)^2 + 20}{\sqrt{10}} = \frac{2 \times 10 + 20}{\sqrt{10}} = \frac{40 \times \sqrt{10}}{\left(\sqrt{10}\right)^2} = \frac{40\sqrt{10}}{10} = 4\sqrt{10}$$

$$si\ x = \sqrt{10}, y = \frac{20}{\sqrt{10}} = \frac{20\sqrt{10}}{\left(\sqrt{10}\right)^2} = \frac{20\sqrt{10}}{10} = 2\sqrt{10}$$

• conclusion

La longueur minimale de clôture est $4\sqrt{10}\ m$, atteinte lorsque $AB = \sqrt{10}\ m$ et $BC = 2\sqrt{10}\ m$.